Connected components of spaces of Morse functions with fixed critical points

Elena A. Kudryavtseva

Abstract. Let M be a smooth closed orientable surface and $F = F_{p,q,r}$ be the space of Morse functions on M having exactly p critical points of local minima, $q \geq 1$ saddle critical points, and r critical points of local maxima, moreover all the points are fixed. Let F_f be the connected component of a function $f \in F$ in F. By means of the winding number introduced by Reinhart (1960), a surjection $\pi_0(F) \to \mathbb{Z}^{p+r-1}$ is constructed. In particular, $|\pi_0(F)| = \infty$, and the Dehn twist about the boundary of any disk containing exactly two critical points, exactly one of which is a saddle point, does not preserve F_f. Let $\mathscr{D}$ be the group of orientation preserving diffeomorphisms of M leaving fixed the critical points, $\mathscr{D}^0$ be the connected component of id_M in $\mathscr{D}$, and $\mathscr{D}_f \subset \mathscr{D}$ the set of diffeomorphisms preserving F_f. Let $\mathscr{H}_f$ be the subgroup of $\mathscr{D}_f$ generated by $\mathscr{D}^0$ and all diffeomorphisms $h \in \mathscr{D}$ which preserve some functions $f_1 \in F_f$, and let $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}$ be its subgroup generated by $\mathscr{D}^0$ and the Dehn twists about the components of level curves of functions $f_1 \in F_f$. We prove that $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \subsetneq \mathscr{D}_f$ if $q \geq 2$, and construct an epimorphism $\mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \to \mathbb{Z}_2^{q-1}$, by means of the winding number. A finite polyhedral complex $K = K_{p,q,r}$ associated to the space F is defined. An epimorphism $\mu\colon \pi_1(K) \to \mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f$ and finite generating sets for the groups $\mathscr{D}_f/\mathscr{D}^0$ and $\mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f$ in terms of the 2-skeleton of the complex K are constructed.

Key words: Morse functions on a surface, equivalent and isotopic functions, winding number, Dehn twist, admissible diffeomorphism, polyhedral complex.

MSC-class: 58E05, 57M50, 58K65, 46M18

Связные компоненты пространств функций Морса с фиксированными критическими точками

Елена А. Кудрявцева

Аннотация

Пусть M – гладкая замкнутая ориентируемая поверхность и $F = F_{p,q,r}$ – пространство функций Морса на M, имеющих ровно p критических точек локальных минимумов, $q \geq 1$ седловых критических точек и r точек локальных максимумов, причем эти точки фиксированы. Пусть F_f – компонента связности функции $f \in F$ в F. С помощью числа вращения, введенного Рейнхартом (1960), построена сюръекция $\pi_0(F) \to \mathbb{Z}^{p+r-1}$. В частности, $|\pi_0(F)| = \infty$, и скручивание Дэна вокруг границы любого диска, содержащего ровно две критические точки, из которых ровно одна седловая, не сохраняет F_f. Пусть $\mathscr{D}$ – группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов M, оставляющих неподвижными критические точки, $\mathscr{D}^0$ – компонента связности id_M в $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}_f \subset \mathscr{D}$ – множество диффеоморфизмов, сохраняющих F_f. Пусть $\mathscr{H}_f$ – подгруппа $\mathscr{D}_f$, порожденная $\mathscr{D}^0$ и всеми диффеоморфизмами $h \in \mathscr{D}$, сохраняющими какие-либо функции $f_1 \in F_f$, и пусть $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}$ – ее подгруппа, порожденная $\mathscr{D}^0$ и скручиваниями Дэна вокруг компонент линий уровня функций $f_1 \in F_f$. С помощью числа вращения доказано, что $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \subsetneq \mathscr{D}_f$ при $q \geq 2$, и построен эпиморфизм $\mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \to \mathbb{Z}_2^{q-1}$. Определен конечный полиэдральный комплекс $K = K_{p,q,r}$, ассоциированный с пространством F. Построены эпиморфизм $\mu\colon \pi_1(K) \to \mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f$ и конечные множества порождающих элементов групп $\mathscr{D}_f/\mathscr{D}^0$ и $\mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f$ в терминах 2-остова комплекса K.

Ключевые слова: функции Морса на поверхности, эквивалентные и изотопные функции, число вращения, скручивание Дэна, допустимый диффеоморфизм, полиэдральный комплекс.

УДК 515.164.174, 515.122.55

1. Введение. Пусть $M = M_g^2$ – гладкая замкнутая ориентируемая поверхность и $F = F_{p,q,r}$ – пространство функций Морса на M, имеющих ровно $q \geq 1$ седловых критических точек $x_1, \dots, x_q$, p критических точек $x_{q+1}, \dots, x_{p+q}$ локальных минимумов и r точек $x_{p+q+1}, \dots, x_{p+q+r}$ локальных максимумов, причем эти точки фиксированы. Возникает задача: описать гомотопический тип пространства F (в C^∞-топологии) и, в частности, множество $\pi_0(F)$ его связных компонент. С помощью *числа вращения*, введенного Б. Рейнхартом [1], мы строим сюръекцию $\pi_0(F) \to \mathbb{Z}^{p+r-1}$ (теорема 1), аналогичную полному инварианту Ю.М. Бурмана [2, 3] и доказываем равенство $|\pi_0(F)| = \infty$.

Близкая задача была решена С.В. Матвеевым [4] (1997), Х. Цишангом [5] (1998), В.В. Шарко [6] (1998) и С.И. Максименко [7] (2005). Матвеев и Цишанг доказали разными методами линейную связность пространства $\widetilde{F} = \widetilde{F}_{p,q,r} \supset F$ функций Морса на M, имеющих фиксированные множества критических точек локальных минимумов и максимумов. Другой близкий результат был получен Бурманом [2, 3]. Он изучал пространство F' гладких функций без критических точек на некомпактной поверхности M', локально постоянных на крае и имеющих заданное поведение вблизи края. Для любой функции $f \in F'$ он построил отображение $B_f \colon F' \to H^1(M', \partial M')$ (полный топологический инвариант на пространстве F') и доказал, что индуцированное отображение $(B_f)_\# \colon \pi_0(F') \to H^1(M', \partial M')$ биективно. Гомотопический тип пространств функций с умеренными особенностями на окружности изучался В.И. Арнольдом [8]. Функции Морса на поверхностях изучались А.Т. Фоменко и Цишангом [9], А.В. Болсиновым и Фоменко [10, 11], и автором [12] в связи с задачей классификации невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем. Различные вопросы классификации и топологии пространств функций Морса на поверхностях исследовались также в работах [13, 14, 15, 16].

Опишем основные результаты настоящей работы.

Обозначение 1. Пусть $\mathscr{D} = \mathscr{D}(M, \{x_1, \dots, x_{p+q+r}\})$ – группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов M, оставляющих неподвижными все критические точки, пусть $\mathscr{D}^0$ – компонента связности id_M в $\mathscr{D}$, и $\mathscr{D}_f \subset \mathscr{D}$ – множество диффеоморфизмов, сохраняющих компоненту связности F_f функции $f \in F$ в F (в C^∞-топологиях на $\mathscr{D}$ и F, см. [16, §4]). Ниже (определение 1) вводятся группа $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}$ *абсолютно допустимых* и группа $\mathscr{H}_f$ *допустимых* диффеоморфизмов для функции f (отличные от понятия f-допустимого диффеоморфизма $h \in \mathscr{D}_f$ из [7, §6]). По теореме 2 ниже, они являются нормальными подгруппами группы $\mathscr{D}_f$. Так как группа $\mathscr{D}/\mathscr{D}^0$ дискретна, то подгруппы $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}/\mathscr{D}^0 \subset \mathscr{H}_f/\mathscr{D}^0 \subset \mathscr{D}_f/\mathscr{D}^0$ и факторгруппы $\mathscr{D}/\langle\langle \mathscr{D}^0 \rangle\rangle$, $\mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f$ и $\mathscr{H}_f/\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \subset \mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}$ дискретны.

Возникают следующие задачи:

1) Для заданного диффеоморфизма $h \in \mathscr{D}$ определить, принадлежат ли функции f и fh одной компоненте связности F_f пространства F (т.е. принадлежит ли h подгруппе $\mathscr{D}_f$). В частности, описать пространство смежных классов $\mathscr{D}/\mathscr{D}_f \approx \pi_0(F)$ и определить, является ли оно конечным.

2) Для заданного диффеоморфизма $h \in \mathscr{D}$ или $\mathscr{D}_f$ определить, является ли он допустимым (абсолютно допустимым) для функции f (т.е. принадлежит ли подгруппам $\mathscr{H}_f$ и $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}$). В частности, подтвердить или опровергнуть гипотезу М. Басмановой о совпадении подгрупп $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \subset \mathscr{H}_f \subset \mathscr{D}_f$.

3) Описать конечные множества порождающих элементов факторгрупп $\mathscr{D}_f/\mathscr{D}^0$ и $\mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f$.

В данной работе с помощью *числа вращения*, введенного Б. Рейнхартом [1], получены частичные решения первых двух задач, а с помощью *комплексов функций Морса* – решение третьей задачи:

1) Построена сюръекция $\pi_0(F) \approx \mathscr{D}/\mathscr{D}_f \to \mathbb{Z}^{p+r-1}$ (теорема 1). В частности, $|\pi_0(F)| = \infty$.

2) Построена сюръекция $\mathscr{D}/\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \to \mathbb{Z}_2^{q-1}$, которая индуцирует эпиморфизм $\mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \to \mathbb{Z}_2^{q-1}$, а при $M \neq S^2$ – эпиморфизм $\mathscr{H}_f/\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \to \mathbb{Z}_2^{q-1}$ (теорема 2). В частности, при $q \geq 2$ мы получаем опровержение $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \subsetneq \mathscr{D}_f$ гипотезы Басмановой.

3) Определен конечный связный полиэдральный комплекс $K = K_{p,q,r}$, ассоциированный с пространством F (теорема 3). Построены эпиморфизм $\mu \colon \pi_1(K) \to \mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f$ и конечные множества порождающих элементов групп $\mathscr{D}_f/\mathscr{D}^0$ и $\mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f$ в терминах 2-остова комплекса K (теоремы 4, 5).

В статье также исследовано, какие из групп цепочки $\mathscr{D}^0 \subset \mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \subset \mathscr{H}_f \subset \mathscr{D}_f \subset \mathscr{D}$ совпадают (см. следствие), кроме случая $\mathscr{H}_f \subset \mathscr{D}_f$ при $M \neq S^2$, $q \geq 4$. При $M = S^2$ доказаны оценки $q-1 \leq \operatorname{rank}(\mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f) \leq \operatorname{rank}(\pi_1(K))$, $\operatorname{rank}(\mathscr{D}/\langle\langle \mathscr{D}_f\rangle\rangle) \geq p+r-1$, а при $M \neq S^2$ оценки $\operatorname{rank}(\mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f) \leq \operatorname{rank}(\pi_1(K))$, $\operatorname{rank}(\mathscr{H}_f/\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}) \geq q-1$ (следствие и теорема 4), где ранг группы есть минимальное количество порождающих элементов. Отсюда $\mathscr{H}_f = \mathscr{D}_f$, если $\pi_1(K) = 1$. Поэтому $\mathscr{H}_f = \mathscr{D}_f$ в случае $M \neq S^2$, $q \leq 3$ (так как комплексы $K = K_{1,2,1} \approx [0,1]$ и $K = K_{1,3,2} \sim \bigvee_7 S^2$ односвязны).

2. Топологический инвариант на пространстве F, $\mathscr{D}_f$-инвариант на пространстве $\mathscr{D}$. Обозначим через $\mathscr{K}$ подгруппу в $\mathscr{D}$, порожденную $\mathscr{D}^0$ и скручиваниями Дэна [17] вокруг разбивающих кривых (“ядро Джонсона” [18]). Она является нормальной.

Теорема 1 ($\mathscr{D}_f$-инвариант B_f на пространстве $\mathscr{D}$). *Пусть $q \geq 1$ и $f \in F$. Имеется сюръекция $B_f\colon \mathscr{D} \to \mathbb{Z}^{p+r-1}$, ограничение которой на любой смежный класс $\mathscr{D}_f h$, $h \in \mathscr{D}$, постоянно. Ограничение $B_f|_{\mathscr{K}}\colon \mathscr{K} \to \mathbb{Z}^{p+r-1}$ не зависит от функции f и является эпиморфизмом. Скручивание Дэна вокруг границы любого диска, содержащего ровно $k \geq 0$ седловых критических точек и $\ell \notin \{0, k+1, p+r\}$ критических точек локальных минимумов и максимумов, не принадлежит подгруппе $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{K} \subset \ker(B_f|_{\mathscr{K}})$ (т.е. не сохраняет компоненту F_f функции f в F). В частности, $|\pi_0(F)| = \infty$, $\mathscr{D}_f \subsetneq \mathscr{D}$ и имеется сюръекция $\pi_0(F) \approx \mathscr{D}/\mathscr{D}_f \to \mathbb{Z}^{p+r-1}$. Если $M = S^2$, то $\mathscr{K} = \mathscr{D}$, и B_f определяет эпиморфизм $\mathscr{D}/\langle\langle \mathscr{D}_f\rangle\rangle \to \mathbb{Z}^{p+r-1}$, не зависящий от f.*

3. Допустимые диффеоморфизмы и $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}$-инвариант на пространстве $\mathscr{D}$.

Определение 1. Диффеоморфизм $h \in \mathscr{D}$ назовем *допустимым для функции* $f \in F$, если имеются такие функции $f_1, \dots, f_N \in F_f$ и диффеоморфизмы $h_1, \dots, h_N \in \mathscr{D}$, что $f_i = f_i h_i$ и $h \in h_1 \dots h_N \mathscr{D}^0$. Если каждый h_i – скручивание Дэна вокруг связной компоненты кривой $f_i^{-1}(a_i)$, где a_i – некритическое значение функции f_i, то диффеоморфизм h назовем *абсолютно допустимым для* f. Абсолютно допустимые и допустимые диффеоморфизмы для функции $f \in F$ образуют подгруппы $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}$ и $\mathscr{H}_f$ группы $\mathscr{D}$ (см. обозначение 1). Ясно, что $\mathscr{D}^0 \subset \mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \subset \mathscr{H}_f \subset \mathscr{D}_f \subset \mathscr{D}$.

Примеры. (А) Простая замкнутая кривая на M называется *допустимой* [7, §6] для функции Морса $f \in F$, если она является компонентой связности линии уровня $g^{-1}(a)$ некоторой функции $g \in F_f$. Скручивание Дэна вокруг такой кривой – это абсолютно допустимый диффеоморфизм для f.

(Б) Другой пример допустимого диффеоморфизма показан на рис. 1. Как и в примере (А), этот диффеоморфизм $h = h_{ij}$ сохраняет функцию $g \in F_f$, однако он совпадает с тождественным в окрестностях всех критических точек $x_1, \dots, x_{p+q+r}$ кроме двух седловых точек x_i и x_j, в которых $dh(x_i) = -\mathrm{id}$ и $dh(x_j) = -\mathrm{id}$. Такой диффеоморфизм существует для любой поверхности $M \neq S^2$, а при $M = S^2$ – нет. Он не является абсолютно допустимым для f, согласно теореме 2(Б) ниже.

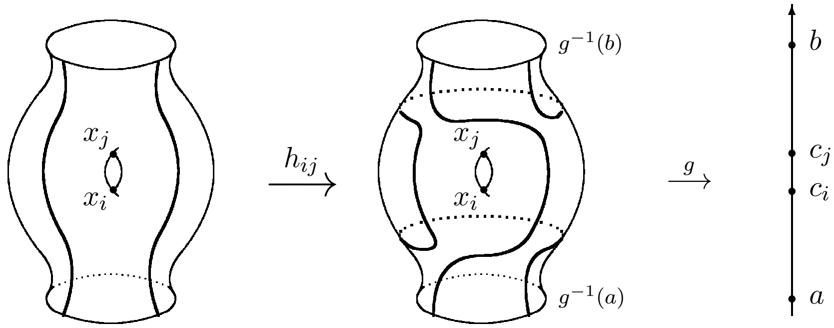

Рис. 1. Допустимый, но не абсолютно допустимый диффеоморфизм h_{ij}.

Группа $\mathscr{H}_f$ допустимых диффеоморфизмов порождена диффеоморфизмами из примеров (А,Б).

Теорема 2 ($\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}$-инвариант B_f^{abs} на пространстве $\mathscr{D}$)**.** *Пусть $q \geq 1$ и $f \in F$. Имеется сюрьекция $B_f^{\mathrm{abs}}\colon \mathscr{D} \to \mathbb{Z}_2^{q-1}$, ограничение которой на любой смежный класс $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}h$, $h \in \mathscr{D}$, постоянно. Подгруппы $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}$ и $\mathscr{H}_f$ являются нормальными в $\mathscr{D}_f$, и выполнены следующие условия:*

(A) *Ограничение $B_f^{\mathrm{abs}}|_H\colon H \to \mathbb{Z}_2^{q-1}$ на любую из трех подгрупп $H \in \{\mathscr{D}_f, \mathscr{K}, \mathscr{D}_f \cap \mathscr{K}\}$ является эпиморфизмом, при $H = \mathscr{K}$ не зависит от f , и $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \subset \ker(B_f^{\mathrm{abs}}|_{\mathscr{D}_f})$. При $q \geq 2$ для любой пары седловых критических точек скручивание Дэна вокруг границы некоторого диска (зависящего от f), содержащего эти две точки и не содержащего других критических точек, принадлежит $\mathscr{D}_f \setminus \mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}$ (т.е. сохраняет компоненту F_f функции f в F , но не является абсолютно допустимым диффеоморфизмом для f). В частности, ограничение $B_f^{\mathrm{abs}}|_{\mathscr{D}_f}$ индуцирует эпиморфизм $\mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \to \mathbb{Z}_2^{q-1}$, и поэтому $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \subsetneq \mathscr{D}_f$ при $q \geq 2$. Если $M = S^2$ и $q \geq 2$, то $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} = \mathscr{H}_f \subsetneq \mathscr{D}_f$.*

(Б) *Если $M \neq S^2$, то ограничение $B_f^{\mathrm{abs}}|_{\mathscr{H}_f}\colon \mathscr{H}_f \to \mathbb{Z}_2^{q-1}$ является эпиморфизмом, индуцирующим эпиморфизм $\mathscr{H}_f/\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \to \mathbb{Z}_2^{q-1}$, причем $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \subsetneq \mathscr{H}_f \subset \mathscr{D}_f$ и допустимый для функции f диффеоморфизм, показанный на рис. 1 , не является абсолютно допустимым для f .*

Если у функции $f_1 \in F_f$ ровно $q \geq 1$ седловых критических значений, то на M имеются $q+g-1$ окружностей, являющихся компонентами линий уровня функции f_1 , и таких что подгруппа группы $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}/\mathscr{D}^0$, порожденная скручиваниями Дэна вокруг этих окружностей, изоморфна $\mathbb{Z}^{q+g-1}$.

Следствие. (A) *Пусть $M = S^2$. Если количество седел $q \geq 2$, то имеется цепочка четырех групп $\mathscr{D}^0 \subsetneq \mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} = \mathscr{H}_f \subsetneq \mathscr{D}_f \subsetneq \mathscr{D}$, в которой все множества смежных классов бесконечны и допускают мономорфизм $\mathbb{Z}^{q-1} \rightarrowtail \mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}/\mathscr{D}^0$ и эпиморфизмы $\mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f \to \mathbb{Z}_2^{q-1}$, $\mathscr{D}/\langle\langle \mathscr{D}_f \rangle\rangle \to \mathbb{Z}^{p+r-1}$. Если $q = 1$, то имеются две группы $\mathscr{D}^0 = \mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} = \mathscr{H}_f = \mathscr{D}_f \subsetneq \mathscr{D}$ с бесконечной факторгруппой $\mathscr{D}/\mathscr{D}^0 \cong \pi_1(S^2 \setminus \{x_2, x_3, x_4\}, x_1) \cong F_2$, где F_2 – свободная группа ранга 2 .*

(Б) *Если $M \neq S^2$, то имеется цепочка пяти групп $\mathscr{D}^0 \subsetneq \mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \subsetneq \mathscr{H}_f \subset \mathscr{D}_f \subsetneq \mathscr{D}$, в которой все множества смежных классов (за исключением, быть может, $\mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f$) бесконечны и допускают мономорфизм $\mathbb{Z}^{q+g-1} \rightarrowtail \mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}/\mathscr{D}^0$, эпиморфизм $\mathscr{H}_f/\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \to \mathbb{Z}_2^{q-1}$ и сюрьекцию $\mathscr{D}/\mathscr{D}_f \to \mathbb{Z}^{p+r-1}$.*

Доказательство теорем 1 и 2. Шаг 1. В данном доказательстве под *кривой* понимается гладкое компактное (не обязательно связное) ориентированное 1-мерное подмногообразие $\alpha \subset M$, край которого есть пересечение множества α с множеством критических точек $x_1, \dots, x_{p+q+r}$. Пусть

$$\gamma_i\colon\ [0,1] \to M, \quad 1 \leq i \leq p+q+r-1, \tag{1}$$

– кривая из точки $\gamma_i(0) = x_{p+q+r}$ в точку $\gamma_i(1) = x_i$. Фиксируем на M риманову метрику.

Определение 2. Для любой такой кривой $\gamma\colon [0,1] \to M$ и любой функции $f \in F$ обозначим через $w_f(\gamma)$ вещественное число, равное "полному количеству оборотов" касательного вектора $\frac{d\gamma}{dt}(t)$ вокруг нуля по отношению к ортогональному реперу в $T_{\gamma(t)}M$, содержащему вектор $\operatorname{grad} f(\gamma(t))$, $0 < t < 1$. Для несвязной кривой $\gamma \subset M$ определим $w_f(\gamma)$ равным сумме чисел, отвечающих ее компонентам. Назовем $w_f(\gamma)$ *числом вращения кривой γ по отношению к функции f* . Оно совпадает с *числом вращения кривой γ по отношению к векторному полю* $\operatorname{grad} f$ (см. [1, §2], [19, определения (1.1)] или [3, §3.2]). Для замкнутой кривой γ число $w_f(\gamma)$ целое и не меняется при деформациях функции $f \in F$ (см. [1, §2], [19, леммы (5.1) и (5.2)], [3, §3.1, утверждение 5]).

Аналогично [1, §2], определим *различающее число* кривой γ по отношению к функциям f, fh :

$$\partial_h w_f(\gamma) := w_f(h\gamma) - w_f(\gamma) = w_{fh}(\gamma) - w_f(\gamma) = (w_{fh} - w_f)(\gamma), \quad h \in \mathscr{D}.$$

Отметим некоторые свойства чисел $w_f(\gamma)$ и $\partial_h w_f(\gamma)$. Для любой пары $h_1, h_2 \in \mathscr{D}$ выполнено

$$\partial_{h_1 h_2} w_f(\gamma) = \partial_{h_1} w_f(\gamma) + \partial_{h_2} w_{fh_1}(\gamma), \tag{2}$$

поскольку $\partial_{h_1h_2}w_f(\gamma)=(w_{fh_1h_2}-w_f)(\gamma)=(w_{fh_1h_2}-w_{fh_1}+w_{fh_1}-w_f)(\gamma)=(\partial_{h_2}w_{fh_1}+\partial_{h_1}w_f)(\gamma)$. Если s_i – маленькая окружность вокруг точки x_i, ориентированная "против часовой стрелки", то

$$w_f(s_i)=1-\operatorname{ind}_{x_i}(\operatorname{grad} f),\quad 1\le i\le p+q+r. \tag{3}$$

Таким образом, $w_f(s_i)$ всегда четно, так как $w_f(s_i)=0$ для точек x_i локальных минимумов и максимумов ($q<i\le p+q+r$) и $w_f(s_i)=2$ для седловых точек x_i ($1\le i\le q$). Более общо, для любой (не обязательно связной) разбивающей кривой $\alpha=\partial N$, где $N\subset M$, выполнено

$$w_f(\partial N)=\chi(N)-\sum_{x_i\in N}\operatorname{ind}_{x_i}(\operatorname{grad} f), \tag{4}$$

где кривая ∂N ориентирована так, что N "находится слева" (это выводится из (3) приклеиванием дисков к компонентам ∂N и продолжением векторного поля $\operatorname{grad} f$ внутрь каждого диска с одной особой точкой, см. [19, лемма (5.7)]). Для любой кривой γ и любой связной замкнутой кривой α

$$\partial_{t_\alpha^k}w_f(\gamma)=k\langle\alpha,\gamma\rangle w_f(\alpha),\qquad k\in\mathbb{Z}, \tag{5}$$

где $\langle\alpha,\gamma\rangle$ – индекс пересечения кривых α и γ, t_α – скручивание Дэна вокруг α.

Согласно (3), (5) и построению (1) кривых γ_i, для любого $j\in[1,p+q+r-1]$ выполнено

$$\partial_{t_{s_j}}w_f(\gamma_i)=2\delta_{ij},\quad 1\le i\le q;\qquad \partial_{t_{s_j}}w_f(\gamma_i)=0,\quad q<i\le p+q+r-1. \tag{6}$$

Для любого $h\in\mathscr{D}$ выберем диффеоморфизм $\widetilde{h}\in h\mathscr{D}^0$, ограничение которого на малую окрестность U множества точек $x_1,\dots,x_{p+q+r}$ совпадает с id_M. Ясно, что число $\partial_{\widetilde{h}}w_f(\gamma_i)$ целое и сохраняется при деформациях функции f в F. При этом, в силу (2) и (6), значения $\partial_{\widetilde{h}}w_f(\gamma) \mod 2\in\mathbb{Z}_2$, $1\le i\le q$, и $\partial_{\widetilde{h}}w_f(\gamma)\in\mathbb{Z}$, $q<i\le p+q+r-1$, не зависят от выбора диффеоморфизма $\widetilde{h}$. Для любых функции $f\in F$ и набора кривых (1) определим отображения B_f и B_f^{abs} формулами

$$B_f^{\mathrm{abs}}\colon\ \mathscr{D}\to\mathbb{Z}_2^{q-1},\qquad B_f^{\mathrm{abs}}(h):=(\partial_{\widetilde{h}}w_f(\gamma_1)\mod 2,\dots,\partial_{\widetilde{h}}w_f(\gamma_{q-1})\mod 2);$$

$$B_f\colon\ \mathscr{D}\to\mathbb{Z}^{p+r-1},\qquad B_f(h):=(\partial_{\widetilde{h}}w_f(\gamma_{q+1}),\dots,\partial_{\widetilde{h}}w_f(\gamma_{p+q+r-1})).$$

В силу (2), для любых $h_1,h_2\in\mathscr{D}$ выполнены равенства

$$B_f(h_1h_2)=B_f(h_1)+B_{fh_1}(h_2),\quad B_f^{\mathrm{abs}}(h_1h_2)=B_f^{\mathrm{abs}}(h_1)+B_{fh_1}^{\mathrm{abs}}(h_2). \tag{7}$$

Поэтому для любых $h_1\in\mathscr{D}_f$ и $h_2\in\mathscr{D}$ выполнены (в силу $B_{fh_1}=B_f$ и $B_{fh_1}^{\mathrm{abs}}=B_f^{\mathrm{abs}}$) равенства

$$B_f(h_1h_2)=B_f(h_1)+B_f(h_2),\quad B_f^{\mathrm{abs}}(h_1h_2)=B_f^{\mathrm{abs}}(h_1)+B_f^{\mathrm{abs}}(h_2). \tag{8}$$

Шаг 2. Докажем равенство $B_f(\mathscr{D}_fh_2)=B_f(h_2)$ для любого $h_2\in\mathscr{D}$. Сначала докажем равенство $B_f(\mathscr{D}_f)=0$. Для любого $h\in\mathscr{D}_f$ рассмотрим число $\partial_{\widetilde{h}}w_f(\gamma_i)=w_{f\widetilde{h}}(\gamma_i)-w_f(\gamma_i)$, $q<i<p+q+r$. Пусть $U'\subset U$ – малая окрестность множества $\{x_{q+1},\dots,x_{p+q+r}\}$ точек локальных минимумов и максимумов. Тогда любой путь f_t в F со свойством $f_0|_U=f_1|_U$ гомотопен в классе путей с фиксированными концами в пространстве F такому пути $\widetilde{f}_t$, что $\widetilde{f}_t|_{U'}=f_0|_{U'}$ при любом $t\in[0,1]$. Из $h\in\mathscr{D}_f$ имеем $f\widetilde{h}\in F_f$, поэтому существует путь f_t в F, такой что $f_0=f$, $f_1=f\widetilde{h}$ и $f_t|_{U'}=f|_{U'}$ при любом $t\in[0,1]$. Разность $w_{f_t}(\gamma_i)-w_f(\gamma_i)$ целая при любом t (так как концы кривой γ_i содержатся в U'), а значит, постоянна и равна $w_{f\widetilde{h}}(\gamma_i)-w_f(\gamma_i)=w_{f_0}(\gamma_i)-w_f(\gamma_i)=0$. Поэтому $B_f(h)=0$ и $B_f(\mathscr{D}_f)=0$. С учетом (8), это дает $B_f(\mathscr{D}_fh_2)=B_f(\mathscr{D}_f)+B_f(h_2)=B_f(h_2)$.

Докажем равенство $B_f^{\mathrm{abs}}(\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}h_2)=B_f^{\mathrm{abs}}(h_2)$ для любого диффеоморфизма $h_2\in\mathscr{D}$. Заметим, что $w_f(\alpha)=0$ для любой допустимой кривой α для f (см. определение 1). В силу (5), это дает

равенство $\partial_{t_\alpha^k} w_f(\gamma_i) = 0$ при $1 \le i < p+q+r$, $k \in \mathbb{Z}$, откуда $B_f^{\mathrm{abs}}(t_\alpha^k) = 0$. С учетом (8), для любого $h_2 \in \mathscr{D}$ выполнено $B_f^{\mathrm{abs}}(t_\alpha^k h_2) = B_f^{\mathrm{abs}}(h_2)$, откуда индукцией получаем $B_f^{\mathrm{abs}}(\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} h_2) = B_f^{\mathrm{abs}}(h_2)$.

Шаг 3. Докажем, что отображения $B_f^{\mathrm{abs}}|_{\mathscr{D}_f}$, $B_f^{\mathrm{abs}}|_{\mathscr{K}}$ и $B_f|_{\mathscr{K}}$ являются гомоморфизмами, причем второй и третий не зависят от функции $f \in F$. Первое отображение является гомоморфизмом в силу (8). В силу (4), для любой связной разбивающей кривой $\alpha = \partial N$ число $w_f(\alpha)$ не зависит от f. С учетом (5), для любого $k \in \mathbb{Z}$ число $\partial_{t_\alpha^k} w_f(\gamma) = k\langle\alpha,\gamma\rangle w_f(\alpha)$ тоже не зависит от f. Поэтому $B_f(t_\alpha^k)$ не зависит от f. Отсюда и из (7) получаем, что $B_f(h_1 t_\alpha^k) = B_f(h_1) + B_{fh_1}(t_\alpha^k) = B_f(h_1) + B_f(t_\alpha^k)$ для любого $h_1 \in \mathscr{D}$. Поэтому $B_f|_{\mathscr{K}}$ – гомоморфизм и не зависит от f; аналогичное верно для $B_f^{\mathrm{abs}}|_{\mathscr{K}}$.

Шаг 4. Покажем, что гомоморфизмы $B_f^{\mathrm{abs}}|_{\mathscr{D}_f \cap \mathscr{K}}$ и $B_f|_{\mathscr{K}}$ являются эпиморфизмами. Это следует из следующего факта. Для любых функции $f \in F$ и числа $i \ne q$, $1 \le i < p+q+r$ (точнее, $i < q$ для $B_f^{\mathrm{abs}}|_{\mathscr{D}_f \cap \mathscr{K}}$ и $i > q$ для $B_f|_{\mathscr{K}}$) можно построить замкнутую кривую $s_{iq} = s_i \# s_q \subset M$, являющуюся "связной суммой" маленьких окружностей s_i и s_q вокруг критических точек x_i и x_q и такую, что скручивание Дэна $t_{s_{iq}}$ вокруг кривой s_{iq} обладает следующими свойствами:

1. $t_{s_{iq}} \in \mathscr{K}$, а в случае $1 \le i < q$ выполнено $t_{s_{iq}} \in \mathscr{D}_f$ (т.е. функция $f t_{s_{iq}}$ принадлежит компоненте связности F_f функции f в пространстве F);

2. в случае $1 \le i < q$ элемент $B_f^{\mathrm{abs}}(t_{s_{iq}})$ совпадает с i-ым элементом канонического базиса группы $\mathbb{Z}_2^{q-1}$, а в случае $q < i < p+q+r$ элемент $B_f(t_{s_{iq}})$ совпадает с $(i-q)$-ым элементом канонического базиса группы $\mathbb{Z}^{p+r-1}$ (поэтому $B_f^{\mathrm{abs}}(\mathscr{D}_f \cap \mathscr{K}) = \mathbb{Z}_2^{q-1}$ и $B_f(\mathscr{K}) = \mathbb{Z}^{p+r-1}$).

Первая часть пункта 1 следует из определения группы $\mathscr{K}$ (так как s_{iq} – связная разбивающая кривая). Пункт 2 следует из (5) и (4), так как (для любого $j \ne q$, $1 \le j < p+q+r$) $\partial_{t_{s_{iq}}} w_f(\gamma_j) = \langle s_{iq}, \gamma_j\rangle w_f(s_{iq})$ равно $\langle s_{iq}, \gamma_j\rangle \cdot 3 = 3\delta_{ij}$ при $1 \le i < q$ и равно $\langle s_{iq}, \gamma_j\rangle \cdot 1 = \delta_{ij}$ при $q < i < p+q+r$. Заменяя окружность s_{iq} на границу диска $D \subset M$, содержащего k седловых и $\ell \notin \{0, k+1, p+r\}$ минимаксных критических точек, а кривую γ_j на любую кривую γ, ведущую из точки минимакса снаружи D в точку минимакса в D, из (5) и (4) аналогично получаем $\partial_{t_{\partial D}} w_f(\gamma) = \langle \partial D, \gamma\rangle w_f(\partial D) = 1 \cdot (1+k-\ell) \ne 0$, откуда $t_{\partial D} \notin \mathscr{D}_f$ (так как $\partial_{\tilde h} w_f(\gamma) = 0$ для любого $h \in \mathscr{D}_f$, см. шаг 2).

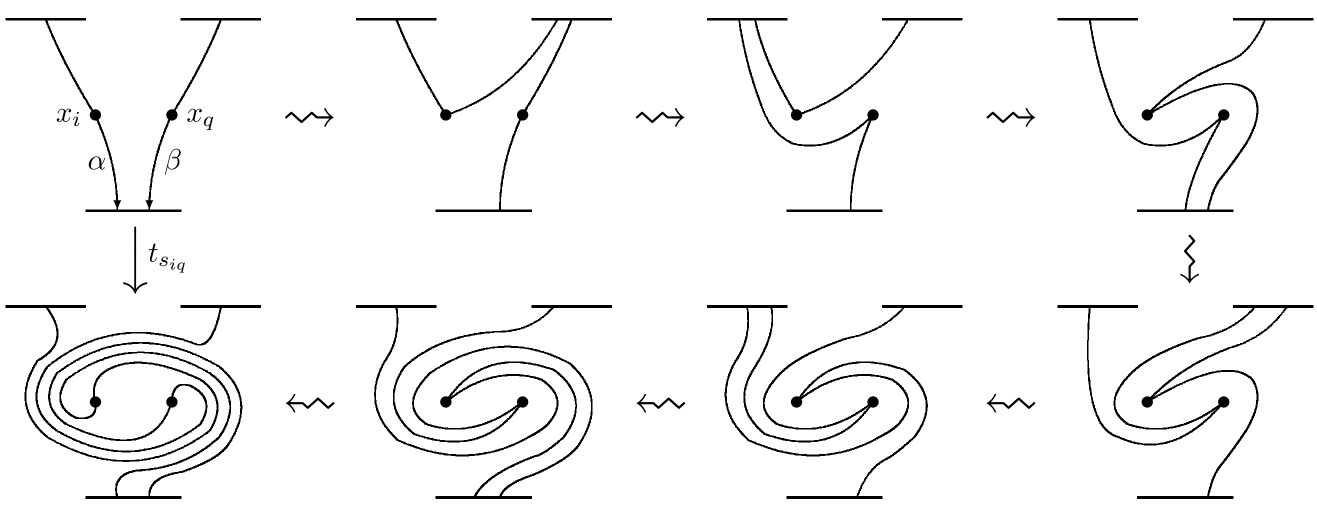

Рис. 2. Реализация действия на f скручивания вокруг двух седел гомотопией в F.

Осталось доказать вторую часть пункта 1. Мы построим требуемую кривую s_{iq}, $1 \le i < q$. Без ограничения общности считаем, что седловые значения $f(x_i), f(x_q)$ превосходят остальные седловые значения $f(x_j)$, $1 \le j \le q-1$, $j \ne i$, и существует точка x_k локального максимума, в которую входят сепаратрисы α и β поля $\operatorname{grad} f$, выходящие из точек x_i и x_q соответственно. Пусть D –

маленький круг вокруг x_k. Рассмотрим кривую $\alpha \cdot \beta^{-1}$ и заменим ее часть $(\alpha \cdot \beta^{-1}) \cap D$ дугой окружности ∂D, не пересекающей две другие сепаратрисы, выходящие из точек x_i и x_q (существование такой дуги не ограничивает общности). Рассмотрим связную сумму $s_{iq} = s_i \# s_q$ окружностей s_i и s_q по отношению к части полученной кривой между точками пересечения с окружностями s_i и s_q. Покажем, что существует путь из функции f в функцию $ft_{s_{iq}}$ в пространстве F функций Морса. Этот путь схематически изображен на рис. 2. Теорема 1 доказана.

Шаг 5. Покажем, что подгруппы $\mathscr{H}_f$ и $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}$ нормальны в $\mathscr{D}_f$. Если $h_1 \in \mathscr{D}_f$ (т.е. $fh_1 \in F_f$) и диффеоморфизм $d \in \mathscr{D}$ сохраняет функцию fh_1 (т.е. $fh_1 d = fh_1$), то для любого $h \in \mathscr{D}_f$ выполнено $(fh_1h^{-1})(hdh^{-1}) = fh_1h^{-1}$, т.е. диффеоморфизм hdh^{-1} сохраняет функцию $fh_1h^{-1} \in F_f$. Так как группа $\mathscr{H}_f$ порождена $\mathscr{D}^0$ и всеми такими d (или всеми такими hdh^{-1}), то $h\mathscr{H}_f h^{-1} = \mathscr{H}_f$. Аналогично доказывается равенство $h\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}h^{-1} = \mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}$ (для этого в качестве d рассматриваются лишь скручивания Дэна). Так как $h \in \mathscr{D}_f$ любой, то подгруппы $\mathscr{H}_f$ и $\mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}}$ нормальны в $\mathscr{D}_f$.

Шаг 6. Пусть $M \neq S^2$. Покажем, что $B_f^{\mathrm{abs}}(\mathscr{H}_f) = \mathbb{Z}_2^{q-1}$. Рассмотрим допустимый, но не абсолютно допустимый для f диффеоморфизм $h_{iq} \in \mathscr{H}_f \setminus \mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \subset \mathscr{D}_f$, показанный на рис. 1, при $1 \le i < q$. Легко проверяется, что $B_f^{\mathrm{abs}}(h_{iq})$ является i-ым элементом стандартного базиса группы $\mathbb{Z}_2^{q-1}$. Поскольку i любое и $B_f^{\mathrm{abs}}|_{\mathscr{D}_f}$ – гомоморфизм, то $B_f^{\mathrm{abs}}(\mathscr{H}_f) = \mathbb{Z}_2^{q-1}$. Теорема 2 доказана. $\square$

4. Эквивалентность и послойная эквивалентность функций Морса. В следствии описано, какие из соседних групп цепочки $\mathscr{D}^0 \subset \mathscr{H}_f^{\mathrm{abs}} \subset \mathscr{H}_f \subset \mathscr{D}_f \subset \mathscr{D}$ совпадают, кроме случая $\mathscr{H}_f \subset \mathscr{D}_f$ при $M \neq S^2$. Наша дальнейшая цель – описать конечные множества порождающих элементов факторгрупп $\mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f$ и $\mathscr{D}_f/\mathscr{D}^0$ в геометрических терминах.

Определение 3. Функции Морса $f, g \in F$ назовем *подобными*, если они определяют одно и то же разбиение поверхности M на связные компоненты линий уровня $f^{-1}(a)$ и $g^{-1}(b)$, а также один и тот же частичный порядок на множестве седловых критических точек $x_1, \dots, x_q$ согласно значениям функции в этих точках; обозначим это следующим образом: $f \approx g$. Если $f \approx gh$ для некоторого диффеоморфизма $h \in \mathscr{D}$ (соответственно $h \in \mathscr{D}^0$), то функции f, g назовем *эквивалентными* (соответственно *изотопными*); обозначим это через $f \sim g$ (соответственно $f \sim_{\mathrm{isot}} g$). Классы эквивалентности и изотопности функции f обозначим через $[f]$ и $[f]_{\mathrm{isot}}$ соответственно.

Если в определении 3 не налагать условие о частичном порядке на множестве седловых точек, получатся определения *послойной подобности, послойной эквивалентности* и *послойной изотопности.* Фоменко и Болсинов ввели комбинаторные понятия *атома* и *молекулы* и доказали, что классы *послойной эквивалентности* функций Морса на замкнутой поверхности находятся во взаимно однозначном соответствии с молекулами таких функций [11, Гл. 2, §§3–8, теорема 8]. Аналогично вводятся понятия *нумерованного атома, нумерованной молекулы* (с помощью нумерации вершин атомов согласно нумерации критических точек $x_1, \dots, x_{p+q+r}$) и *оснащенной молекулы* (с помощью частичного порядка из определения 3) и доказывается следующий аналог результата из [11].

Утверждение. *Классы эквивалентности функций Морса $f \in F = F_{p,q,r}$ с фиксированными критическими точками на замкнутой ориентируемой поверхности находятся во взаимно однозначном соответствии с оснащенными нумерованными молекулами таких функций. В частности, имеется лишь конечное число классов эквивалентности функций Морса $f \in F = F_{p,q,r}$.*

5. Полиэдральные комплексы функций Морса и их разветвленные накрытия.

Определение 4. (A) Клеточный комплекс X назовем *(кусочно евклидовым) полиэдральным комплексом* [20], если каждая его замкнутая клетка $\bar{\sigma}$ снабжена метрикой, согласованной с индуцированной топологией на $\bar{\sigma}$, и изометрична некоторому выпуклому многограннику P_σ, причем изометрия $\bar{\sigma} \to P_\sigma$ изометрично переводит все замкнутые клетки $\bar{\tau} \subset \partial\bar{\sigma}$ в грани многогранника P_σ.

(Б) Отображение $r\colon \widetilde{K}\to K$ полиэдральных комплексов назовем *правильным*, если его ограничение на любую клетку $\widetilde{\sigma}$ комплекса $\widetilde{K}$ является изометрией на некоторую клетку σ комплекса K. Клетку $\widetilde{\sigma}$ назовем *поднятием* клетки σ при r. В частности, r является клеточным отображением. Правильные биекции $K\to K$ назовем *автоморфизмами* полиэдрального комплекса K.

(В) Пусть $\sigma,\tau\subset X$ – два непересекающихся подмножества топологического пространства X (например, две открытые клетки клеточного комплекса). Будем говорить, что σ *примыкает к* τ и писать $\tau\prec\sigma$ (и $\bar\tau\prec\bar\sigma$), если $\tau\subset\partial\sigma:=\bar\sigma\setminus\sigma$. Пишем $\tau\preceq\sigma$, если $\tau\prec\sigma$ или $\tau=\sigma$.

Определение 5. Отображение $r\colon \widetilde{K}\to K$ полиэдральных комплексов назовем *разветвленным накрытием*, если оно правильное (см. определение 4(Б)) и для любой клетки $\widetilde{\tau}\subset\widetilde{K}$ любая клетка $\sigma\subset K$, примыкающая к клетке $\tau:=r(\widetilde{\tau})$ (см. определение 4(В)), имеет поднятие $\widetilde{\sigma}\subset\widetilde{K}$ (см. определение 4(Б)), примыкающее к клетке $\widetilde{\tau}$.

Теорема 3. *Пусть количество седловых критических точек $q\ge 1$. Существуют $(q-1)$-мерный выпуклый многогранник $\mathcal{P}^{q-1}$ и $(q-1)$-мерные полиэдральные комплексы $\widetilde{K}=\widetilde{K}_{p,q,r}$ и $K=K_{p,q,r}$ (зависящие от чисел p,r,q критических точек локальных минимумов, максимумов и седловых точек), ассоциированные с пространством $F=F_{p,q,r}$ функций Морса, и разветвленные накрытия $\widetilde{K}\xrightarrow{r}K\xrightarrow{r_0}\mathcal{P}^{q-1}$, такие что комплекс K конечен и связен, и выполнены следующие условия:*

(А) *Пространство F гомотопически эквивалентно полиэдральному комплексу $\widetilde{K}$.*

(Б) *Клетки комплекса $\widetilde{K}$ (соответственно K) находятся во взаимно однозначном соответствии с классами изотопности $[f]_{\rm isot}$ (соответственно классами эквивалентности $[f]$) функций Морса $f\in F$. Размерность любой клетки равна $q-s(f)$, где $s(f)$ равно количеству седловых критических значений функции $f\in F$, отвечающей данной клетке. Две клетки τ,σ комплекса $\widetilde{K}$ (соответственно K) примыкают друг к другу: $\tau\prec\sigma$ тогда и только тогда, когда соответствующие им классы функций Морса $[f]_{\rm isot}\leftrightarrow\sigma$, $[g]_{\rm isot}\leftrightarrow\tau$ примыкают друг к другу как подмножества F в C^∞-топологии: $[f]_{\rm isot}\prec[g]_{\rm isot}$ (соответственно $[f]\prec[g]$, где $[f]\leftrightarrow\sigma$ и $[g]\leftrightarrow\tau$).*

(В) *Имеется правое действие группы $\mathscr{D}/\mathscr{D}^0$ на комплексе $\widetilde{K}$ автоморфизмами полиэдрального комплекса, согласованное с естественным правым действием группы $\mathscr{D}$ на пространстве F. Разветвленное накрытие $r\colon\widetilde{K}\to K$ является $\mathscr{D}/\mathscr{D}^0$-инвариантным и переводит друг в друга клетки $\widetilde{\sigma}\to\sigma$, отвечающие классам $[f]_{\rm isot}\subset[f]$ одной и той же функции Морса $f\in F$.*

Пункт (А) теоремы 3 и утверждение о том, что r_0 – разветвленное накрытие, не будут использованы в настоящей работе; их доказательство будет дано в следующих публикациях на основе [16].

Доказательство пунктов (Б,В) теоремы 3. Шаг 1. Опишем построение выпуклого многогранника $\mathcal{P}^{q-1}$. Пусть $\mathcal{P}^{q-1}\subset\mathbb{R}^q$ – выпуклая оболочка множества точек $P_\pi:=\sum_{k=1}^q\left(k-\frac{q+1}{2}\right)e_{\pi_k}$, $\pi\in\Sigma_q$, где $e_1,\dots,e_q$ – стандартный базис $\mathbb{R}^q$. Известно [21], что $\mathcal{P}^{q-1}$ – это $(q-1)$-мерный выпуклый многогранник в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^{q-1}:=(e_1+\ldots+e_q)^\perp$, имеющий ровно $q!$ вершин P_π, $\pi\in\Sigma_q$, причем его $(q-s)$-мерные грани находятся во взаимно однозначном соответствии с упорядоченными разбиениями $J=(J_1,\dots,J_s)$ множества $\{1,\dots,q\}$ на s непустых подмножеств $J_1,\dots,J_s$ (т.е. $\{1,\dots,q\}=J_1\sqcup\ldots\sqcup J_s$), $1\le s\le q$. А именно, грань $\tau_J^{q-s}\subset\mathcal{P}^{q-1}$, отвечающая разбиению J, – это выпуклая оболочка множества точек $(\Sigma_{r_1}\times\Sigma_{r_2-r_1}\times\ldots\times\Sigma_{r_s-r_{s-1}})(P_\pi)$, где числа $0=r_0<r_1<\ldots<r_{s-1}<r_s=q$ и перестановка $\pi\in\Sigma_q$ однозначно определяются условиями

$$J=(J_1,\dots,J_s),\quad J_1=\{\pi_1,\dots,\pi_{r_1}\},\ J_2=\{\pi_{r_1+1},\dots,\pi_{r_2}\},\ \dots,\ J_s=\{\pi_{r_{s-1}+1},\dots,\pi_{r_s}\},\qquad(9)$$

$\pi_1<\ldots<\pi_{r_1}$, $\pi_{r_1+1}<\ldots<\pi_{r_2},\dots,\pi_{r_{s-1}+1}<\ldots<\pi_{r_s}$. Здесь $\Sigma_{r_1}\times\Sigma_{r_2-r_1}\times\ldots\times\Sigma_{r_s-r_{s-1}}$ – подгруппа группы Σ_q, отвечающая разбиению $\{1,\dots,q\}=\{1,\dots,r_1\}\sqcup\{r_1+1,\dots,r_2\}\sqcup\ldots\sqcup\{r_{s-1}+1,\dots,r_s\}$, и действие перестановки $\rho\in\Sigma_q$ на точке P_π дает точку $P_{\rho\pi}$, где $(\rho\pi)_i:=\pi_{\rho_i}$, $1\le i\le q$.

Если разбиение $\widehat{J}$ получается из разбиения $J=(J_1,\dots,J_s)$ путем измельчения (т.е. разбиения некоторых множеств J_k на несколько подмножеств), будем писать $\widehat{J}\prec J$. Из описания граней многогранника $\mathcal{P}^{q-1}$ следует, что условие $\widehat{J}\prec J$ равносильно $\tau_{\widehat{J}}\prec\tau_J$ (см. определение 4(В)).

Шаг 2. Для каждой функции Морса $f \in F$ рассмотрим набор $\bar{c} = \bar{c}(f) = (c_1, \dots, c_q) \in \mathbb{R}^q$ ее седловых критических значений $c_i := f(x_i)$, $1 \le i \le q$. Сопоставим набору $\bar{c} = (c_1, \dots, c_q)$ число $s(\bar{c}) := |\{c_1, \dots, c_q\}|$ различных седловых значений и упорядоченное разбиение $J(\bar{c}) = (J_1, \dots, J_s)$ множества $\{1, \dots, q\}$, определяемое свойствами (9) и $c_{\pi_1} = \dots = c_{\pi_{r_1}} < c_{\pi_{r_1+1}} = \dots = c_{\pi_{r_2}} < \dots < c_{\pi_{r_{s-1}+1}} = \dots = c_{\pi_{r_s}}$. Сопоставим разбиению $J(\bar{c})$ и классу эквивалентности $[f]$ грань $\tau_{J(\bar{c})} \subset \mathcal{P}^{q-1}$.

Шаг 3. Покажем, что для любой функции $f \in F$ имеется биекция $\delta[f]$ между множеством всех граней $\tau' \prec \tau := \tau_{J(\bar{c}(f))}$ и множеством всех классов эквивалентности $[g] \succ [f]$ (см. определение 4(В)), такая что $\delta[f]\colon \tau' \mapsto [g] =: \delta_{\tau'}[f]$ при $\tau' = \tau_{J(\bar{c}(g))}$. Это следует из следующих двух свойств:

1) для любого $\bar{c} \in \mathbb{R}^q$ существует $\varepsilon_0 > 0$, такое что (i) для любого $\bar{c}' \in \mathbb{R}^q$ со свойством $|\bar{c}' - \bar{c}| < \varepsilon_0$ выполнено $J(\bar{c}') \preceq J(\bar{c})$, и (ii) для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и разбиения $\widehat{J} \preceq J(\bar{c})$ существует $\bar{c}' \in \mathbb{R}^q$ со свойствами $|\bar{c}' - \bar{c}| < \varepsilon_0$ и $J(\bar{c}') = \widehat{J}$;

2) согласно [12, утверждение 1.1 и §3], любая функция $f \in F$ имеет окрестность U в F, такую что для любых $g, g_1 \in U$ равенства $[g] = [g_1]$ и $J(\bar{c}(g)) = J(\bar{c}(g_1))$ равносильны.

Из этих свойств получаем, что из $[h] \succ [g] \succ [f]$ следует $[h] \succ [f]$. Поэтому

$$\delta_{\tau''}[f] = \delta_{\tau''}\delta_{\tau'}[f] \quad \text{для любых граней } \tau'' \prec \tau' \prec \tau_{J(\bar{c}(f))}. \tag{10}$$

Шаг 4. Опишем построение полиэдрального комплекса K, удовлетворяющего условиям пункта (Б), вместе с правильным отображением $r_0\colon K \to \mathcal{P}^{q-1}$. Рассмотрим метрическое пространство $X := \bigsqcup_{[f] \in F/\sim} \upsilon_{[f]}$, где $\upsilon_{[f]}$ является выпуклым многогранником, изометричным грани $\tau_{J(\bar{c}(f))} \subset \mathcal{P}^{q-1}$. Фиксируем отображение $\pi\colon X \to \mathcal{P}^{q-1}$, ограничение которого на каждый многогранник $\upsilon_{[f]}$ является изометрией $\upsilon_{[f]} \to \tau_{J(\bar{c}(f))}$. Очевидно, π является правильным отображением полиэдральных комплексов (см. определение 4(Б)). Обозначим $\varphi_{[f]} := (\pi|_{\upsilon_{[f]}})^{-1}\colon \tau_{J(\bar{c}(f))} \to \upsilon_{[f]}$.

Опишем (индукцией по $k \ge 0$) построение отношения эквивалентности на множестве $X^{(k)} := \bigsqcup_{\dim \upsilon_{[f]} \le k} \upsilon_{[f]} \subset X$ вместе с отображением $\pi_k\colon K^{(k)} \to (\mathcal{P}^{q-1})^{(k)}$, таких что

$$\pi_k \circ p_k = \pi|_{X^{(k)}}, \quad p_k \circ \varphi_{[f]}|_{\tau'} = p_k \circ \varphi_{\delta_{\tau'}[f]} \quad \text{для любых } f \in F,\ \dim \upsilon_{[f]} \le k, \quad \text{и} \quad \tau' \prec \tau_{J(\bar{c}(f))}, \tag{11}$$

где $K^{(k)}$ – множество классов эквивалентности в $X^{(k)}$, $p_k\colon X^{(k)} \to K^{(k)}$ – каноническая проекция, $\delta[f]$ – биекция из шага 3. При $k = 0$ различные точки считаем не эквивалентными, определим π_0 формулой $\pi_0(\upsilon_{[f]}) := \tau_{J(\bar{c}(f))}$ при $\dim \upsilon_{[f]} = 0$, тогда выполнено (11) для $k = 0$. Пусть $k \ge 1$ и отношение эквивалентности на $X^{(k-1)}$ с отображением π_{k-1} уже построены, причем $K^{(k-1)}$ является $(k-1)$-мерным полиэдральным комплексом, π_{k-1} – правильным отображением и выполнено (11) для $k-1$. Из (10) и (11) для $k-1$ следует, что для каждого $[f]$, $\dim \upsilon_{[f]} = k$, имеется правильное вложение $\varphi'_{[f]}\colon \partial\tau_{J(\bar{c}(f))} \to K^{(k-1)}$, такое что $\varphi'_{[f]}|_{\tau'} = p_{k-1} \circ \varphi_{\delta_{\tau'}[f]}$ для любого $\tau' \prec \tau_{J(\bar{c}(f))}$. Определим отношение эквивалентности на $K^{(k-1)} \sqcup \left(\bigsqcup_{\dim \upsilon_{[f]} = k} \upsilon_{[f]} \right)$, отождествляя каждую точку из $\partial\upsilon_{[f]}$ с ее образом при правильном вложении $\varphi'_{[f]} \circ \pi$. Тогда выполнено (11), откуда $K^{(k)}$ – k-мерный полиэдральный комплекс и $\pi_k\colon K^{(k)} \to (\mathcal{P}^{q-1})^{(k)}$ – правильное отображение.

Таким образом, мы построили отношение эквивалентности $\sim_{\mathrm{glue}}$ на всем $X = X^{(q-1)}$, полиэдральный комплекс $K = K^{(q-1)} = X/\sim_{\mathrm{glue}}$ и правильное отображение $r_0 = \pi_{q-1}\colon K \to \mathcal{P}^{q-1}$.

Шаг 5. Из утверждения и теоремы 3(Б) следует, что полиэдральный комплекс K конечен. Из результата о приведении функций Морса к нормальной форме [4] следует, что K связен. Аналогично шагам 2–4 строится полиэдральный комплекс $\widetilde{K}$, удовлетворяющий условиям пункта (Б), вместе с правильным отображением $\widetilde{K} \to \mathcal{P}^{q-1}$ (для этого надо всюду в шагах 2–4 заменить $[f], \upsilon_{[f]}, X, X^{(k)}$,

$K^{(k)}, \pi, \pi_k, p_k, \varphi_{[f]}, \varphi'_{[f]}$ на $[f]_{\mathrm{isot}}, \widetilde{v}_{[f]_{\mathrm{isot}}}, \widetilde{X}, \widetilde{X}^{(k)}, \widetilde{K}^{(k)}, \widetilde{\pi}, \widetilde{\pi}_k, \widetilde{p}_k, \widetilde{\varphi}_{[f]_{\mathrm{isot}}}, \widetilde{\varphi}'_{[f]_{\mathrm{isot}}}$). Рассмотрим правое действие группы $\mathscr{D}/\mathscr{D}^0$ на $\widetilde{X} := \bigsqcup_{[f]_{\mathrm{isot}} \in F/\sim_{\mathrm{isot}}} \widetilde{v}_{[f]_{\mathrm{isot}}}$, где элемент $h\mathscr{D}^0 \in \mathscr{D}/\mathscr{D}^0$ действует по правилу $h\mathscr{D}^0|_{\widetilde{v}_{[f]_{\mathrm{isot}}}} := \widetilde{\varphi}_{[fh]_{\mathrm{isot}}} \circ \widetilde{\pi}|_{\widetilde{v}_{[f]_{\mathrm{isot}}}}\colon \widetilde{v}_{[f]_{\mathrm{isot}}} \to \widetilde{v}_{[fh]_{\mathrm{isot}}}$; тогда $X \approx \widetilde{X}/(\mathscr{D}/\mathscr{D}^0)$. Это действие индуцирует действие группы $\mathscr{D}/\mathscr{D}^0$ на $\widetilde{K}$ автоморфизмами полиэдрального комплекса (так как отображения $\widetilde{\pi}\colon \widetilde{X} \to \mathcal{P}^{q-1}$ и $\delta_{\tau'}$, а потому и отношение эквивалентности $\sim_{\mathrm{glue}}$ на $\widetilde{X}$, $\mathscr{D}/\mathscr{D}^0$ -инвариантны). Поэтому композиция правильного $\mathscr{D}/\mathscr{D}^0$ -инвариантного отображения $\widetilde{X} \to X$ и правильного отображения $X \to K$ индуцирует правильное $\mathscr{D}/\mathscr{D}^0$ -инвариантное отображение $r\colon \widetilde{K} \to K$, такое что $r(\widetilde{\sigma}) = \sigma \leftrightarrow [f]$ при $\widetilde{\sigma} \leftrightarrow [f]_{\mathrm{isot}}$. Отсюда r – разветвленное накрытие (см. определение 5). ☐

Обозначение 2. Для любой клетки $\widehat{\tau}$ комплекса $\widetilde{K}$ обозначим через $\mathscr{D}^{\widehat{\tau}}$ множество элементов $h \in \mathscr{D}/\mathscr{D}^0$, таких что $\widehat{\tau}h = \widehat{\tau}$ (см. теорему 3(В)). Пусть $K^{(r)}$ – r -мерный остов комплекса K .

Теорема 4. *Пусть $q \geq 1$ и $f \in F$. Имеется эпиморфизм $\mu\colon \pi_1(K) \to \mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f$. В частности, группа $\mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f$ имеет набор образующих $\mu([\gamma_1]), \ldots, \mu([\gamma_\ell])$, где $[\gamma_1], \ldots, [\gamma_\ell]$ – образующие $\pi_1(K)$.*

Доказательство. Пусть $\tau \subset K$ и $\widetilde{\tau} \subset \widetilde{K}$ – клетки комплексов K и $\widetilde{K}$, отвечающие классам $[f]$ и $[f]_{\mathrm{isot}}$ (см. теорему 3(Б)). Без ограничения общности считаем, что эти клетки нульмерны. Пусть $\widetilde{K}_f$ – связная компонента комплекса $\widetilde{K}$, содержащая клетку $\widetilde{\tau}$. Рассмотрим правое действие группы $\mathscr{D}_f/\mathscr{D}^0$ и ее подгруппы $\mathscr{H}_f/\mathscr{D}^0$ на $\widetilde{K}_f$ (см. теорему 3(В)). Так как разветвленное накрытие $\widetilde{K}_f \to K$ является $\mathscr{D}_f/\mathscr{D}^0$ -инвариантным (см. там же), то $K'_f := \widetilde{K}_f/(\mathscr{H}_f/\mathscr{D}^0)$ – полиэдральный комплекс, а проекция $r'_f\colon K'_f \to K \approx K'_f/(\mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f)$ – разветвленное накрытие. В действительности, r'_f является накрытием, так как K'_f связен и действие на нем группы $\mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f$ свободно (в силу $\mathscr{D}^{\widehat{\tau}} \subset \mathscr{H}_f/\mathscr{D}^0$). Поэтому имеется естественный эпиморфизм $\mu\colon \pi_1(K, \tau) \to \mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f$, переводящий гомотопический класс любой петли $\gamma\colon [0,1] \to K$, $\gamma(0) = \gamma(1) = \tau$, в элемент $h_\gamma \in \mathscr{D}_f/\mathscr{H}_f$, такой что $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{\gamma}(0)h_\gamma^{-1}$. Здесь $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \to K'_f$ – такое поднятие пути γ , что $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{\tau}(\mathscr{H}_f/\mathscr{D}^0)$. ☐

Опишем теперь образующие группы $\mathscr{D}_f/\mathscr{D}^0$ в терминах конечного связного графа $K^{(1)}$. Пусть $T \subset K^{(1)}$ – остовное дерево графа $K^{(1)}$, пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ – все ребра из $K^{(1)} \setminus T$. Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_V$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_E$ – все вершины и все ребра графа $K^{(1)}$ (каждое ребро снабдим произвольной ориентацией). Имеем $n = E - V + 1$. Пусть $S\colon T \to \widetilde{K}$ – любое непрерывное поднятие дерева T , такое что $S(\tau) = \widetilde{\tau}$ (здесь $\tau, \widetilde{\tau}$ как в доказательстве теоремы 4), и пусть $\widehat{\sigma}_e$ – такое поднятие ребра σ_e , что $\widehat{\sigma}_e(0) = S(\sigma_e(0))$, $1 \leq e \leq n$. Имеем $\widehat{\sigma}_e(1) = S(\sigma_e(1))h_e$ для некоторого $h_e \in \mathscr{D}_f/\mathscr{D}^0$, $1 \leq e \leq n$. Элементы $h_1, \ldots, h_n \in \mathscr{D}_f/\mathscr{D}^0$ назовем *T -дополнительными элементами.*

Теорема 5 (М. Басманова и Е. Кудрявцева, 1999)**.** *Пусть $q \geq 1$ и $f \in F$. Группа $\mathscr{D}_f/\mathscr{D}^0$ имеет конечную систему образующих $A_1 \cup \ldots \cup A_V \cup \{h_1, \ldots, h_n\}$, где A_v – конечная система образующих группы $\mathscr{D}^{S(\tau_v)}$, $1 \leq v \leq V$* (см. обозначение 2)*, $h_1, \ldots, h_n \in \mathscr{D}_f/\mathscr{D}^0$ – T -дополнительные элементы. Для минимального числа образующих верно* $\operatorname{rank}(\mathscr{D}_f/\mathscr{D}^0) \leq (q+g-1)V + n = (q+g-2)V + E + 1$ *, где V и E – количества вершин и ребер графа $K^{(1)}$, $n = E - V + 1$, g – род поверхности M .*

Доказательство. Пусть $h \in \mathscr{D}_f/\mathscr{D}^0$. Тогда, в обозначениях доказательства теоремы 4, существуют петля $\gamma\colon [0,1] \to K^{(1)}$ и ее поднятие $\widetilde{\gamma}$ в $\widetilde{K}$, такие что $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{\tau}$ и $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{\tau}h$. Пусть $\gamma = \sigma_{e_1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot \sigma_{e_N}^{\varepsilon_N}$ – разложение петли γ в произведение ориентированных ребер комплекса K , где $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ и $e_i \in \{1, \ldots, E\}$, $1 \leq i \leq N$, и пусть $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\sigma}_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot \widetilde{\sigma}_N^{\varepsilon_N}$ – соответствующее разложение. Обозначим $\widetilde{\tau}_i := \widetilde{\sigma}_i^{\varepsilon_i}(1)$ при $1 \leq i \leq N$; $\widehat{\sigma}_e := S(\sigma_e)$ и $h_e := 1 \in \mathscr{D}_f/\mathscr{D}^0$ при $n < e \leq E$. Имеем $\sigma_{e_i}^{\varepsilon_i}(1) = \tau_{v_i}$ для некоторого $v_i \in \{1, \ldots, V\}$; $\widetilde{\sigma}_i^{\varepsilon_i} = \widehat{\sigma}_{e_i}^{\varepsilon_i}\widetilde{h}_i$ для некоторого $\widetilde{h}_i \in \mathscr{D}/\mathscr{D}^0$ ($1 \leq i \leq N$).

Из $\widetilde{\tau} = \widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{\sigma}_1^{\varepsilon_1}(0) = \widehat{\sigma}_{e_1}^{\varepsilon_1}(0)\widetilde{h}_1$ имеем $\widetilde{\tau} = \widetilde{\tau}h_{e_1}^{\frac{1-\varepsilon_1}{2}}\widetilde{h}_1$, откуда $\widetilde{h}_1 \in h_{e_1}^{\frac{\varepsilon_1-1}{2}}\mathscr{D}^{\widetilde{\tau}}$ (см. обозначение 2). При $1 \leq i < N$ из $\widetilde{\sigma}_i^{\varepsilon_i}(1) = \widehat{\sigma}_{e_i}^{\varepsilon_i}(1)\widetilde{h}_i$ и $\widetilde{\sigma}_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}(0) = \widehat{\sigma}_{e_{i+1}}^{\varepsilon_{i+1}}(0)\widetilde{h}_{i+1}$ имеем $\widetilde{\tau}_i = S(\tau_{v_i})h_{e_i}^{\frac{\varepsilon_i+1}{2}}\widetilde{h}_i$ и $\widetilde{\tau}_i =$

$S(\tau_{v_i})h_{e_{i+1}}^{\frac{1-\varepsilon_{i+1}}{2}}\widetilde{h}_{i+1}$, откуда $\widetilde{h}_{i+1}\widetilde{h}_i^{-1} \in h_{e_{i+1}}^{\frac{\varepsilon_{i+1}-1}{2}}\mathscr{D}^{S(\tau_{v_i})}h_{e_i}^{\frac{\varepsilon_i+1}{2}}$. Из $\widetilde{\sigma}_N^{\varepsilon_N}(1) = \widehat{\sigma}_{e_N}^{\varepsilon_N}(1)\widetilde{h}_N$ и $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{\tau}h$ имеем $\widetilde{\tau}_N = S(\tau_{v_N})h_{e_N}^{\frac{\varepsilon_N+1}{2}}\widetilde{h}_N = \widetilde{\tau}h_{e_N}^{\frac{\varepsilon_N+1}{2}}\widetilde{h}_N$ и $\widetilde{\tau}_N = \widetilde{\tau}h$, откуда $h\widetilde{h}_N^{-1} \in \mathscr{D}^{\widetilde{\tau}}h_{e_N}^{\frac{\varepsilon_N+1}{2}}$. Поэтому

$$h \;=\; (h\widetilde{h}_N^{-1})\,(\widetilde{h}_N\widetilde{h}_{N-1}^{-1})\;\ldots\;(\widetilde{h}_2\widetilde{h}_1^{-1})\,\widetilde{h}_1 \;\in\; \mathscr{D}^{\widetilde{\tau}}\,h_{e_N}^{\varepsilon_N}\,\mathscr{D}^{S(\tau_{v_{N-1}})}\,h_{e_{N-1}}^{\varepsilon_{N-1}}\;\ldots\;h_{e_2}^{\varepsilon_2}\,\mathscr{D}^{S(\tau_{v_1})}\,h_{e_1}^{\varepsilon_1}\,\mathscr{D}^{\widetilde{\tau}},$$

т.е. h есть произведение степеней элементов из $A_1 \cup \ldots \cup A_V \cup \{h_1, \ldots, h_n\}$. Оценка $\operatorname{rank}(A_v) \le q + g - 1$ легко доказывается, см. замечание перед следствием. $\square$

Автор приносит благодарность Д.М. Афанасьеву, М. Басмановой, Ю.М. Бурману, М. Концевичу, Д.А. Пермякову, Л. Фадеевой, А.Т. Фоменко и Х. Цишангу за полезные замечания и обсуждения.

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 10–01–00748-а, грантом программы “Ведущие научные школы РФ” НШ-3224.2010.1, грантом программы “Развитие научного потенциала высшей школы” РНП 2.1.1.3704 «Современная дифференциальная геометрия, топология и приложения» и грантом ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (контракты № 02.740.11.5213 и № 14.740.11.0794).

Список литературы

[1] *Reinhart B.L.*, The winding number on two manifolds // Ann. Inst. Fourier. 1960. **10**, 271–283.

[2] *Burman Yu.M.*, Morse theory for functions of two variables without critical points // Funct. Diff. Eq. 1995. **3**, N 1, 2. 31–31.

[3] *Burman Yu.M.*, Triangulation of surfaces with boundary and the homotopy principle for functions without critical points // Annals of Global Analysis and Geometry. 1999. **17**, N 3. 221–238.

[4] *Kudryavtseva E.A.*, Realization of smooth functions on surfaces as height functions // Sbornik Mathematics. 1999. **190**, No. 3-4. 349–405.

[5] *Kudryavtseva E.A.*, Canonical form of Reeb graph for Morse functions on surfaces. Inversion of 2-sphere in 3-space // International Journal of Shape Modeling. 1999. **5**, N 1. 69–80.

[6] Sharko V.V., *Functions on surfaces*, I. In: Proc. Inst. Math. Ukr. NAS “Some problems of modern mathematics” (Ed. V.V.Sharko), Kiev, **25** (1998), 408–434.

[7] *Maksymenko S.I.*, Path-components of Morse mappings spaces on surfaces // Comment. Math. Helv. 2005. **80**:3. 655–690.

[8] *Arnold V.I.*, Spaces of functions with moderate singularities // Funkt. anal. i ego pril. 1989. **23**, № 3. 1–10.

[9] *Fomenko A.T., Zieschang H.*, Topological invariant and criterion of equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom // Izv. AN SSSR. Ser. matem. 1990. **54**, № 3. 546–575.

[10] *Bolsinov A.V., Fomenko A.T.*, Orbital equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. Classification theorem, I // Matem. sb. 1994. **185**, № 4. 27–89; II // Matem. sb. 1994. **185**, № 5. 27–28.

[11] *Bolsinov A.V., Fomenko A.T.*, Introduction into topology of integrable Hamiltonian systems // Moscow: Nauka, 1997.

[12] *Kudryavtseva E.A.*, Stable topological and smooth invariants for conjugacy of Hamiltonian systems on surfaces // In: Topological methods in theory of Hamiltonian systems / Eds. Fomenko, A.T. and Bolsinov, A.V. (Moscow: Factorial, 1998), 147–202 (in Russian).

[13] *Kulinich E.V.*, On topologically equivalent Morse functions on surfaces // Methods of Funct. Anal. Topology. 1998. **4**, N 1. 59–64.

[14] *Maksymenko S.I.*, Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces // Annals of Global Analysis and Geometry. 2006. **29**, N 3. 241–285. arXiv:math.GT/0310067 v5 14 Aug 2006

[15] *Kudryavtseva E.A.*, Uniform Morse lemma and isotopy criterion for Morse functions on surfaces // Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1, Mat. Mekh., No. 4 (2009), 13–22 (in Russian). Transl. Moscow Univ. Math. Bull., **64** (no. 4) (2009), 12–20.

[16] *Kudryavtseva E.A. and Permyakov D.A.*, Framed Morse functions on surfaces // Matem. Sbornik. 2010. **201**, № 4, 33–98 (in Russian). Transl. Sbornik Mathematics. 2010. **201**, N. 4, 501–567.

[17] *Dehn M.*, Die Gruppe der Abbildungsklassen (Das arithmetische Feld auf Flächen) // Acta math. 1938. **69**. 135–206.

[18] *Johnson D.*, The structure of the Torelli group. II. A characterization of the group generated by twists on bounding curves // Topology. 1985. **24**. 113–126.

[19] *Chillingworth D.R.J.*, Winding numbers on surfaces, I // Math. Ann. 1972. **196**. 218–249.

[20] *Bridson M.R., Haefliger A.*, Metric spaces of non-positive curvature // Berlin, Heidelberg, N.Y., Barcelona, Hong Kong, London, Milan, Paris, Singapore, Tokyo: Springer, 1999.

[21] *Postnikov A.*, Permutohedra, associahedra, and beyond // arXiv:math/0507163v1 [math.CO] 7 Jul 2005.

Mathematics and Mechanics Department of Moscow State University
E-mail address: eakudr@mech.math.msu.su